Esempio di studio di equazione differenziale ordinaria

Quesito: si consideri la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \frac{t}{x(t)}, \\ \\ x(0) = -1. \end{cases}$$

Calcolare, giustificando la risposta, $\lim_{t \to +\infty} x(t)$.

Soluzione: Sia I il dominio della soluzione massimale x. Allora

$$x(t)x'(t) = t \quad \forall t \in I,$$

da cui

$$\int_0^t x(s)x'(s)ds = \int_0^t s ds = \frac{t^2}{2}.$$

Per il teorema di cambiamento di variabile,

$$\int_0^t x(s)x'(s)ds = \int_{-1}^{x(t)} x dx = \frac{x(t)^2 - 1}{2},$$

da cui

$$\frac{x(t)^2 - 1}{2} = \frac{t^2}{2} \quad \forall t \in I,$$

$$x(t)^2 = 1 + t^2 \quad \forall t \in I.$$

Osserviamo ora che, poiché $x(t) \neq 0$ $\forall t \in I$ e $x(0) < 0$, si ha, come conseguenza del teorema di Bolzano, che $x(t) < 0$ $\forall t \in I$. Ne segue che

$$x(t) = -\sqrt{t^2 + 1} \quad \forall t \in I.$$

La funzione $y(t) = -\sqrt{t^2 + 1}$ di dominio $\mathbb{R}$ è soluzione dell'equazione in tutto il suo dominio. Quindi $x = y$ e

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{t \to +\infty} (-\sqrt{t^2 + 1}) = -\infty.$$